Extremwertproblem (mit geometrischer Nebenbedingung)

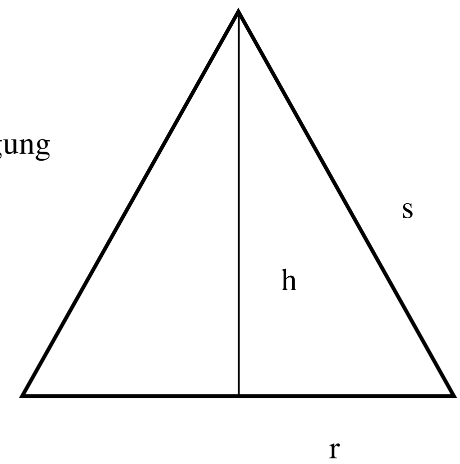
Das Volumen eines Kreiskegels mit einer Mantellinie von s = 12 cm soll maximiert werden. Bestimmen Sie die Maße eines solchen Kreiskegels!

Hauptbedingung

$$V(r,h) = \frac{1}{3}\pi \cdot r^2 \cdot h$$

Nebenbedingung

$s^2 = h^2 + r^2 \Rightarrow r^2 = s^2 - h^2$ Skizze zur Nebenbedingung



Zielfunktion

$$V(h) = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot (s^2 - h^2) \cdot h$$
$$= \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \left(s^2 \cdot h - h^3\right)$$

Die Variable s ist hierbei ein Parameter (Leistungskursniveau), für die konkrete Aufgabenstellung hat s^2 den Wert 144 (cm^2).

$$V(h) = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot (144 \cdot h - h^3)$$

Definitionsbereich

$$D(V) = \left(0;12\right)$$

Die Mantellinie s ist die Hypotenuse und somit die längste Seite des Dreiecks (s. Skizze), d.h., die Höhe h muss in jedem Fall kleiner sein als die Mantellinie.

Bestimmung des Extremums

Lokale Extrema

$$V'(h) = \frac{1}{3}\pi \cdot (144 - 3 \cdot h^2)$$

$$V''(h) = \frac{1}{3}\pi \cdot (-6 \cdot h)$$
$$= -2 \cdot \pi \cdot h$$

$$V'(h_E) = 0$$
$$\Rightarrow 144 - 3 \cdot h_E^2 = 0$$
$$h_E = \sqrt{48}$$
$$\underline{\underline{h_E = 4 \cdot \sqrt{3}}}$$

$$V''\left(4 \cdot \sqrt{3}\right) = -8 \cdot \pi \cdot \sqrt{3} < 0$$
$$\Rightarrow \text{lokales Maximum}$$

Die lokale Maximum-Stelle liegt im Definitionsbereich.

$$V_{max} = V(h_E)$$
$$V\left(4 \cdot \sqrt{3}\right) = \frac{1}{3}\pi \cdot \left(144 \cdot 4 \cdot \sqrt{3} - \left(4 \cdot \sqrt{3}\right)^3\right)$$
$$= \frac{1}{3}\pi \cdot \left(576 \cdot \sqrt{3} - 192 \cdot \sqrt{3}\right)$$
$$= \frac{1}{3}\pi \cdot 384 \cdot \sqrt{3}$$
$$\underline{\underline{= 128\pi \cdot \sqrt{3}}}$$

Globales Maximum

Das lokale Maximum ist auch das globale Maximum, da $V(h)$ im gesamten Definitionsbereich differenzierbar und somit stetig ist und $h_E = 4 \cdot \sqrt{3}$ die einzige lokale Maximum-Stelle im Definitionsbereich ist.

Extremalmaße

$$V_{max} = 128\pi \cdot \sqrt{3}\ \text{cm}^3$$
$$\underline{\underline{\approx 696{,}5\ \text{cm}^3}}$$

$$h_E = 4 \cdot \sqrt{3}\ \text{cm}$$
$$\underline{\underline{\approx 6{,}9\ \text{cm}}}$$

$$r_E = \sqrt{144\text{cm}^2 - 48\text{cm}^2}$$
$$= 4 \cdot \sqrt{6}\ \text{cm}$$
$$\underline{\underline{\approx 9{,}8\ \text{cm}}}$$

Allgemeine Lösung (mit Parameter)

Zielfunktion

$$V_S(h) = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot (s^2 - h^2) \cdot h$$

$$V_S(h) = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \left(s^2 \cdot h - h^3\right)$$

Definitionsbereich

$$D(V_S) = \left(0; s\right)$$

Ableitungen

$$V_S'(h) = \frac{1}{3}\pi \cdot (s^2 - 3 \cdot h^2)$$

$$V_S''(h) = \frac{1}{3}\pi \cdot (-6 \cdot h)$$

$$= -2 \cdot \pi \cdot h$$

lokales Extremum

$$V_S'(h_E) = 0$$

$$\Rightarrow s^2 - 3 \cdot h_E^2 = 0$$

$$\underline{\underline{h_{SE} = \frac{s}{\sqrt{3}}}}$$

$$V_S''\left(\frac{s}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{2\pi \cdot s}{\sqrt{3}} < 0$$

$\Rightarrow$ lokales Maximum

$$V_{max} = V_S(h_E)$$

$$V_S\left(\frac{s}{\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{3}\pi \cdot \left(s^2 \cdot \frac{s}{\sqrt{3}} - \left(\frac{s}{\sqrt{3}}\right)^3\right)$$

$$= \frac{1}{3}\pi \cdot \left(\frac{s^3}{\sqrt{3}} - \frac{s^3}{3 \cdot \sqrt{3}}\right)$$

$$= \frac{1}{3}\pi \cdot \frac{2 \cdot s^3}{3\sqrt{3}}$$

$$\underline{\underline{= \frac{2\pi \cdot s^3}{9 \cdot \sqrt{3}}}}$$

Radius

$$r_E = \sqrt{s^2 - \frac{s}{3}^2}$$

$$\underline{\underline{= \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot s}}$$