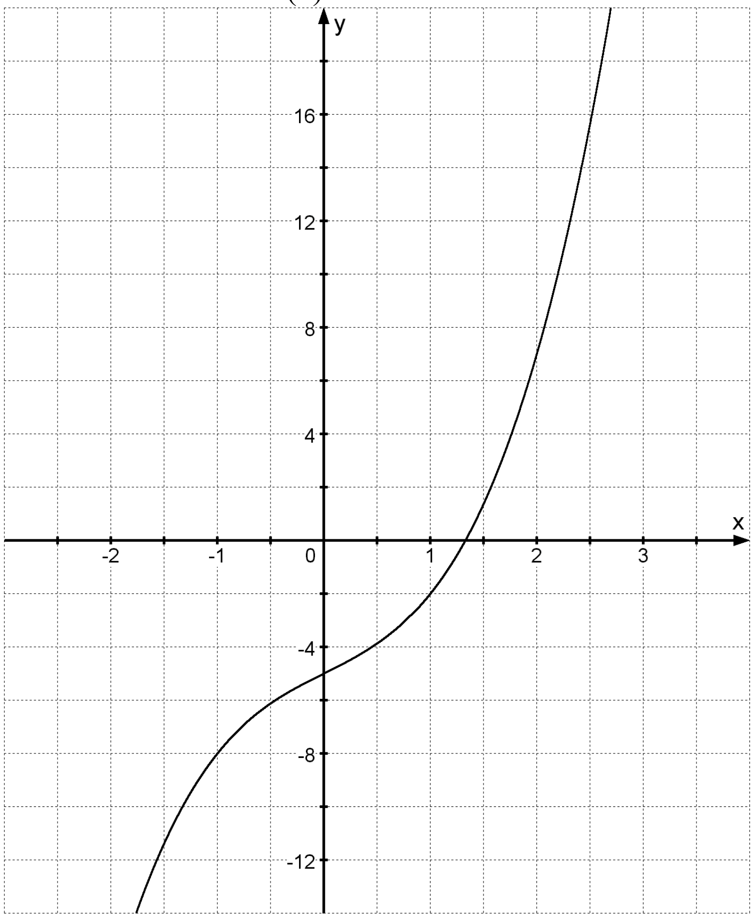
Lernbeispiel zum Newtonverfahren

Gesucht ist die Nullstelle der Funktion $f(x) = x^3 + 2x - 5$.



Aufgabe 1

Ermitteln Sie grafisch den Wert der Nullstelle der gegebenen Funktion nach folgendem Verfahren!

1. Wählen Sie den Startwert $x_0 = 2{,}5$.
2. Verbinden Sie $(x_0, 0)$ mit dem zugehörenden Punkt $(x_0, f(x_0))$ auf dem Graphen. Zeichnen Sie die Tangente durch $(x_0, f(x_0))$ an den Graphen möglichst genau ein.
3. Schneiden Sie die Tangente mit der x-Achse und bezeichnen Sie den Schnittpunkt mit $(x_1, 0)$. Lesen Sie den Wert von x_1 ab.
4. Wählen Sie x_1 als neuen Startwert und ermitteln Sie graphisch den nächsten Näherungswert x_2.

Aufgabe 2

Der grafische Näherungswert x_1 aus Aufgabe 1, soll jetzt rechnerisch ermittelt werden. Gehen Sie wieder in drei Schritten vor.

1. Wählen Sie $x_0 = 2{,}5$ als Startwert.
2. Berechnen Sie den Funktionswert $f(x_0)$. Berechnen Sie dann die Steigung der Tangente an den Graphen im Kurvenpunkt $(x_0, f(x_0))$.
3. Ermitteln Sie den Schnittpunkt der Tangente mit der x-Achse. Die x-Koordinate des Schnittpunkts ist der neue Näherungswert x_1.

Aufgabe 3

Berechnen Sie den nächsten Näherungswert für die Nullstelle von f. Verwenden Sie den in Aufgabe 2 erhaltenen Wert x_1 als neuen Startwert.

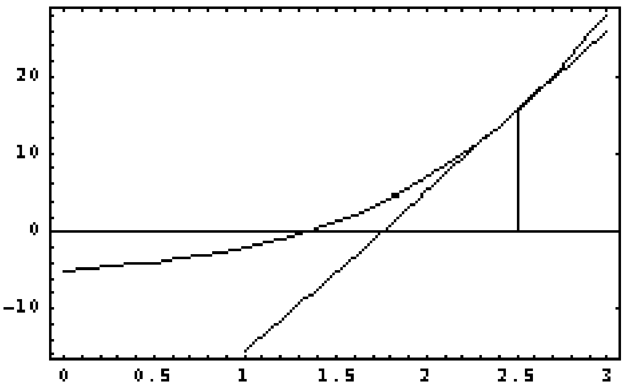
Aufgabe 4
Wann würden Sie aufhören und das Verfahren abbrechen?

Aufgabe 5
Es gibt Fälle in denen das Newtonverfahren versagt. Versuchen Sie sich vorzustellen, wie der Graph einer Funktion f aussehen müsste, damit das Newtonverfahren zur Lösung der Gleichung f(x) = 0 versagt.

Lösungen

Aufgabe 1
Siehe Bild in der Lösung zu Aufgabe 2.

Aufgabe 2
Startwert $x_0 = 2,5$
$f(x_0) = f(2,5) = 15,625$
Die Steigung der Tangente ist der Wert der Ableitung der Funktion f an der Stelle $x_0 = 2,5$,
$f'(x) = 3x^2 + 2$, also $f'(x_0) = f'(2,5) = 20,75$.



Zur Berechnung von x_1 gibt es zwei Möglichkeiten:
Sei y = y(x) die Gleichung der Tangente t an den Graphen durch $P(x_0, f(x_0))$.

a) Steigungsdreieck: Das Dreieck, gebildet aus der Tangente t, der x-Achse und der Vertikalen durch x_0, ist ein Steigungsdreieck, also gilt
$$\frac{f(x_0)}{x_0 - x_1} = f'(x_0).$$

Daraus folgt, durch Auflösung nach x_1
$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

Das ist die „allgemeine Formel" für das Newtonverfahren. Sie besagt, wie man aus einer Näherung x_0 für die Lösung der Gleichung f(x) = 0, eine (hoffentlich) bessere Näherung x_1 bekommt. Setzt man die konkreten Zahlen ein, erhält man
$$x_1 = 2,5 - 15,625:20.75 = 1,747...$$

b) Tangentengleichung bestimmen: Ansatz für die Tangentengleichung: y(x) = m x + n. Die Steigung m der Tangente ist $m = f'(x_0) = 20,75$. Die Tangente verläuft durch den Punkt $P(x_0, f(x_0))$. Also müssen seine Koordinaten die Tangentengleichung erfüllen: $f(x_0) = mx_0 + n$. Daraus folgt $n = f(x_0) - mx_0 = 15,625 - 51,875 = -36,25$. Somit lautet die Tangentengleichung
$$y = y(x) = f'(x_0)x + f(x_0) - f'(x_0)\,x_0 = 20,75x - 36,25.$$

Um den Schnittpunkt $(x_1, 0)$ der Tangente t mit der x-Achse zu erhalten, wird die Gleichung

$$0 = f'(x_0)\, x_1 + f(x_0) - f'(x_0)\, x_0$$

nach x_1 aufgelöst. Das Resultat ist

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

Das ist die „allgemeine Formel" des Newtonverfahrens. Sie besagt, wie man aus einer Näherung x_0 für die Lösung der Gleichung $f(x) = 0$, eine (hoffentlich) bessere Näherung x_1 bekommt. Führt man die Rechnung mit den konkreten Zahlen durch, muss folgende Gleichung gelöst werden

$$0 = 20{,}75x_1 - 36{,}25.$$

Man erhält

$$x_1 = 36{,}25:20{,}75 = 1{,}747...$$

Aufgabe 3

1. Startwert $x_0 = 1{,}747$
2. $f(x_0) = 3{,}8258...$
3. Steigung der Tangente $f'(x_0)= 11{,}156...$
4. $x_1 = 1{,}404058...$
   dritter Näherungswert: 1,33127...
   vierter Näherungswert: 1,32827377...
   fünfter Näherungswert: 1,3282688556818...
   sechster Näherungswert: 1,3282688556686...

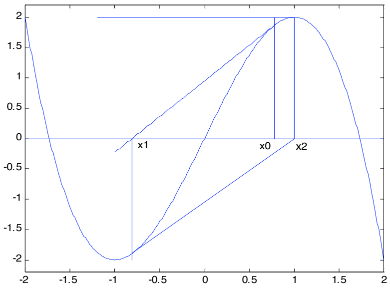
Bemerkung
Man sieht, dass sich bereits nach dem vierten Näherungswert vier Stellen nach dem Dezimalpunkt nicht mehr verändern. Die Nullstelle ist dann schon auf vier Stellen nach dem Dezimalpunkt bestimmt. Der sechste Näherungswert unterscheidet sich in den ersten zehn Stellen nach dem Dezimalpunkt nicht mehr vom fünften Näherungswert. In wenigen Schritten wird also die Nullstelle sehr genau bestimmt.

Aufgabe 4
Der Abbruch des Verfahrens ist angezeigt, wenn der Betrag von $f(x_1):f'(x_1)$ sehr klein ist, mit anderen Worten wenn von einem Näherungswert zum nächsten praktisch keine Veränderung mehr festzustellen ist (wann das eintritt hängt allerdings von der gewählten Rechengenauigkeit ab)
oder
die berechneten Werte sich nicht einem bestimmten Wert nähern, also „nicht konvergieren", siehe Aufgabe 5.

Aufgabe 5
Drei Fälle, für die das Newtonverfahren versagt:

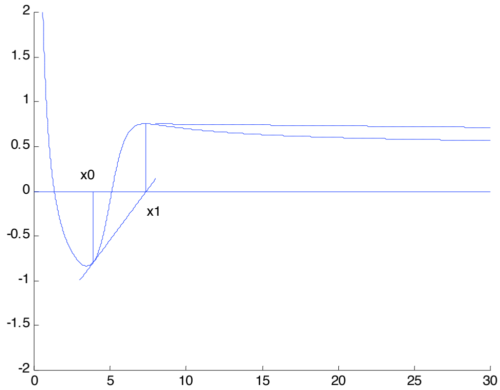
Fall 1: Die Steigung einer Tangente wird 0
(Folge: Division durch 0!).
In unserem Beispiel ist $f(x) = 3x - x^3$. Der Startwert $x_0 = 0{,}779771833161...$ ergibt $x_1 = -0{,}806443932358...$ und $x_2 = 1$. Wegen $f'(1) = 0$ bricht das Newtonverfahren hier ab. Natürlich wird man in der Praxis nicht von einem so ausgeklügelten Startwert ausgehen! Was

passiert, wenn der Startwert etwas kleiner, oder etwas größer gewählt wird als 0,779771833161...?



Fall 2: Das Verfahren „wendet sich von der Nullstelle ab".

Hier ist die betrachtete Funktion f(x) = -0.5 + 2/x + tanh(x-5). (tanh(t) ist die Abkürzung für die Funktion $(e^t - e^{-t})/(e^t + e^{-t})$). Als Startwert wird x_0 = 3,9 gewählt. Dann erhält man x_1 = 7,35..., x_2 = 417,71.... M.a.W.: Es sieht so aus, als ob die Werte, die man mit dem Newtonverfahren erhält, immer größer würden.



Fall 3:Die Näherungswerte pendeln zwischen zwei Werten.

Hier heißt die betrachtete Funktion f(x) = 6 tanh(x) + x, Startwert ist x_0 = 4. Nach einigen Schritten pendeln die Werte, die das Newtonverfahren liefert, zwischen den Werten –5,998150... und 5,2998150... hin und her.